# 高1スーパーα数学

駿台数学科編

**2010/2011　冬期**　平成22年12月発行
学内限り　駿台予備学校

# § 1 指数・対数

## 基本事項

### 1．指数法則

$a > 0$，$b > 0$，$x$，$y$ を実数とするとき，

(1) $a^x \times a^y = a^{x+y}$　　(2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$　　(4) $(ab)^x = a^x b^x$

### 2．指数関数のグラフ

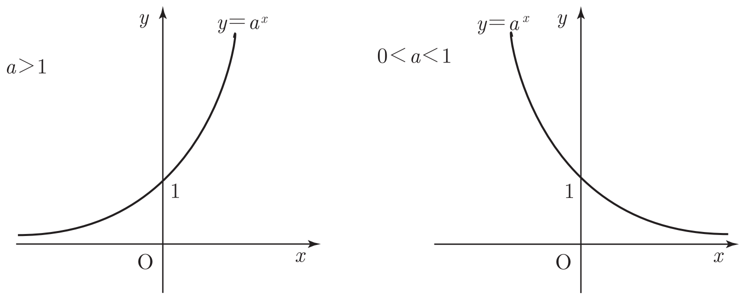
$y = a^x$（$a > 0$，$a \neq 1$）のグラフは，

(1)（i）底 $a$ が 1 より大きいとき，つねに増加する．（単調増加）

（ii）底 $a$ が 1 より小さいとき，つねに減少する．（単調減少）

(2) 点（0，1）を通る．

(3) $x$ 軸より上側にあり，$x$ 軸を漸近線に持つ．




### 3．指数方程式，不等式の解法

(1) $a^x = a^u \iff x = u \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

(2) $a^x > a^u \iff \begin{cases} x > u & (a > 1) \\ x < u & (a < 1) \end{cases}$

(3) 適当な置き換えによって，既知の方程式，不等式の形にする．

### 4．対数の計算法則

$a > 0$，$a \neq 1$，$x > 0$，$y > 0$ として

（i） $\log_a 1 = 0$，$\log_a a = 1$

（ii） $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

（iii） $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

### 5．底の変換公式

$a > 0$，$b > 0$，$c > 0$，$a \neq 1$，$c \neq 1$ として

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

## 例 題 1

実数 $x$ に対して，$t = 2^x + 2^{-x}$，$y = 4^x - 6 \cdot 2^x - 6 \cdot 2^{-x} + 4^{-x}$ とおく．次の問に答えよ．

(1) $x$ が実数全体を動くとき，$t$ の最小値を求めよ．

(2) $y$ を $t$ の式で表せ．

(3) $x$ が実数全体を動くとき，$y$ の最小値を求めよ．

(4) $y = a$（$a$ は実数）となるような $x$ の個数を求めよ．

---

### ➲ 解 答

(1) 任意の実数 $x$ に対して $2^x > 0$，$2^{-x} > 0$ であるから

相加相乗平均の不等式より，

$$t = 2^x + 2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}$$
$$= 2$$

（等号は $2^x = 2^{-x} \iff x = 0$ のとき成立）

$\therefore$ （最小値）$= 2$

(2) $4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2$
$= t^2 - 2$

とできることに注意すれば

$$y = (4^x + 4^{-x}) - 6(2^x + 2^{-x})$$
$$= t^2 - 6t - 2$$

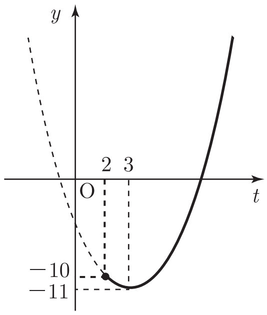
となる．

(3) (2)の結果より

$$y = t^2 - 6t - 2$$
$$= (t-3)^2 - 11$$

(1)より $t \geqq 2$ であるから右図より

（最小値）$= -11$




(4) (3)のグラフに注目し，

$$\begin{cases} t > 2 & \text{なる解は 2 個の } x \text{ に対応する．} \\ t = 2 & \text{なる解は 1 個の } x \text{ に対応する．} \\ t < 2 & \text{なる解に対応する } x \text{ は存在しない．} \end{cases}$$

であることに注意して，$a$ の値の変化に応じて解の個数を分類すると

| $a$ | $\cdots$ | $-11$ | $\cdots$ | $-10$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| $x$ | 0 | 2 | 4 | 3 | 2 |

となる．

**[1－1]**

次の問いに答えよ.

(1) $y=\log_{\frac{1}{2}}(3-x)$, $y=\log_2(x+1)$ のグラフを描け.

(2) この 2 つのグラフの交点の座標を求めよ.

(3) $y=\log_2(x+1)-\log_{\frac{1}{2}}(3-x)$ の最大値と, それを与える $x$ の値を求めよ.